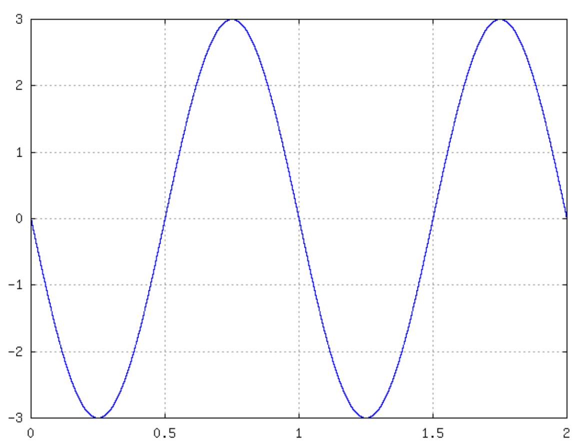
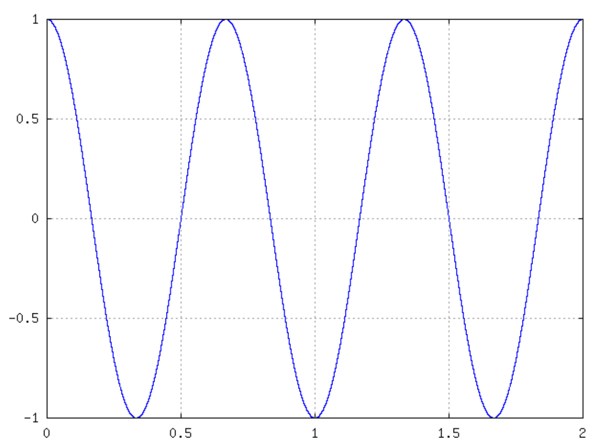
Tentamen Signalen & Systemen

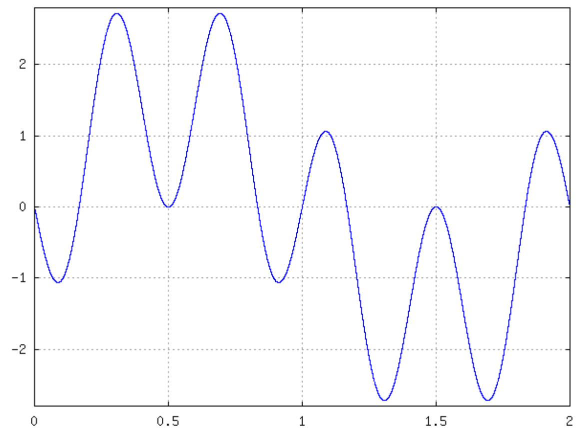
Vrijdag 3 april 2009, 9:00-12:00 uur, Examenhal

- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Voor antwoorden zonder toelichting (zelfs als het antwoord juist is) worden geen punten toegekend.
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. De opgaven 1 en 4 zijn 2 punten waard.De opgaven 2 en 3 zijn 3 punten waard.

Opgave 1: signalen en spectra
In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de uitwijking als functie van de tijd.
(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\sin(2\pi 10t) \\
y(t) &= \cos(2\pi t + \pi/4) \\
z(t) &= x(t)y(t)
\end{aligned}
$$

Schrijf ieder van deze signalen als een **som** van complexe e-machten.
(c) Teken van ieder signaal het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.
(d) Een toeschouwer bij motor-races hoort bij (snelle) nadering van een motor de frequentie van het motor-geluid toenemen totdat de motor ter hoogte van de toeschouwer is. Bij het voorbij rijden daalt de frequentie weer. Hoe heet dit effect? Leg uit hoe dit werkt.

Opgave 2: LTI-systemen
Gegeven is het discrete signaal $x[n]$ dat wordt gedefinieerd door

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-4].$$

Dit signaal plaatsen we op de invoer van een onbekend LTI-system F_0. De uitvoer van dit systeem is het discrete signaal $y[n]$

$$y[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-6] + 2\delta[n-7].$$

(a) Wat betekent het dat F_0 een zgn. LTI-systeem is?
(b) Is F_0 een causaal systeem?
(c) Bepaal de unit impulse respons van het systeem F_0.

Een ander LTI-systeem F_1 wordt gegeven door de unit impulse respons

$$h_1[n] = 4\delta[n] - 2\delta[n-1] - 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4].$$

(d) Wat is de uitvoer van het systeem F_1 als we op de invoer het signaal $z[n]$ plaatsen, waarbij

$$z[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] - \delta[n-5].$$

(e) Geef een voorbeeld van een invoer van F_1 die als uitvoer $y[n] = 0$ (voor alle n) oplevert. Uiteraard wordt hier niet gevraagd om de triviale input die overal 0 is.
(f) Wat is de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}})$ van het systeem F_1?
(g) Gegeven is een derde LTI system F_2. Dit systeem heeft de frequentierespons

$$H_2(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}}.$$

Bepaal de frequentierespons en de impulsrespons van het systeem dat verkregen wordt als we de uitvoer van het system F_1 koppelen aan de invoer van het systeem F_2.

Opgave 3: Fourier analyse
Een continu periodiek signaal $x(t)$ met periode T_0 heet *negatief symmetrisch* als

$$x(t + T_0/2) = -x(t) \quad \text{voor } -\infty < t < \infty.$$

(a) Toon aan dat de DC-component van een negatief symmetrisch signaal nul is.

(b) Toon aan dat van een negatief symmetrisch signaal de Fourier-coëfficienten a_k met even index k nul zijn.

(c) Voor de periodieke continue signalen $x(t)$ en $y(t)$ geldt $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, m.a.w. $y(t)$ is de afgeleide van $x(t)$. Laat a_k de Fourier-coëfficienten van $x(t)$ zijn. Toon aan dat de Fourier-coëfficienten b_k van $y(t)$ gegeven worden door $b_k = 2jk\pi a_k/T_0$.

Gegeven zijn 2 periodieke signalen $x(t)$ en $y(t)$ waarvoor $x(t) = x(t+2)$, $y(t) = y(t+2)$ voor alle t. Tevens is gegeven

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ 2-t & \text{voor } 1 \le t < 2 \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{voor } 1 \le t < 2 \end{cases}$$

(d) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k van het signaal $x(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 k^2} & \text{voor } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \\ 0 & \text{voor } k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \\ 1/2 & \text{voor } k = 0 \end{cases}$$

(e) Bepaal de Fourier-coëfficienten (voor alle k) van het signaal $y(t)$.

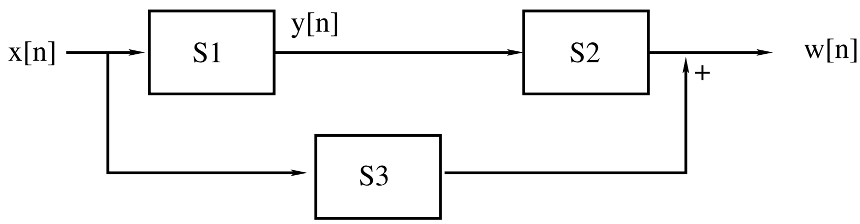
Opgave 4: z-transformaties
Een LTI-systeem wordt gegeven door de differentie-vergelijking

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

.

(a) Wat is de systeemfunctie van dit systeem?
(b) We bieden dit systeem de invoer $x[n] = 4 + \cos(\frac{n\pi - \pi}{4}) - 3\cos(\frac{2n\pi}{3})$ aan. Wat is de uitvoer?
(c) Bepaal de nulpunten van de systeemfunctie. Wat is het belang van deze nulpunten?
(d) Construeer de systeemfunctie van een FIR-filter dat de frequenties $\hat{w}_0 = \frac{\pi}{3}$ en $\hat{w}_0 = \frac{\pi}{4}$ volledig verwijderd (uiteraard wordt de triviale oplossing $H(z) = 0$ niet gevraagd). Wat is de differentie-vergelijking van dit systeem?

De onderstaande figuur toont de samenstelling van drie LTI systemen S_1, S_2 en S_3.



Het systeem S_1 wordt gegeven door de differentie-vergelijking $y[n] = x[n] - x[n-1]$. Het systeem S_2 wordt gegeven door de systeemfunctie $H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-2})$. Het systeem S_3 heeft de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}}) = 2e^{-j3\hat{\omega}}$.

Maak de onderstaande vragen (e)-(g). Kies zelf een handige volgorde.

(e) Wat is de differentievergelijking voor het totale (samengestelde) systeem?
(f) Wat is de impulsrespons van het totale (samengestelde) systeem?
(g) Wat is de systeemfunctie van het totale (samengestelde) systeem?

Formuleblad Systemen en Signalen

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2) \tag{1}$$
$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k) \text{ voor gehele } k \tag{2}$$
$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \tag{3}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \tag{4}$$
$$\cos(2\pi k) = 1 \text{ voor gehele } k \tag{5}$$
$$\cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 0 \text{ voor gehele } k \tag{6}$$
$$\cos(2\pi k + \pi) = -1 \text{ voor gehele } k \tag{7}$$
$$j^2 = -1 \tag{8}$$
$$Re(a + jb) = a \tag{9}$$
$$Im(a + jb) = b \tag{10}$$
$$(a + jb)^* = a - jb \tag{11}$$
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{12}$$
$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \tag{13}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{14}$$
$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + c \tag{15}$$
$$\int t e^{\alpha t} dt = \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + c \tag{16}$$
$$x[n] = x(nT_s) \text{ Perfect A-to-D conversion} \tag{17}$$
$$f_s = \frac{1}{T_s} \text{ Sampling frequency} \tag{18}$$
$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \text{ Normalized Radian Frequency} \tag{19}$$
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT_s) \text{ Interpolation/Reconstruction} \tag{20}$$
$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \quad -\infty < t < \infty \text{ Sinc pulse} \tag{21}$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \text{ Fourier synthesis} \tag{22}$$
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt}\, dt \text{ Fourier analysis} \tag{23}$$
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \text{ DFT (Discrete Fourier Transform)} \tag{24}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \text{ Inverse DFT} \tag{25}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \text{ FIR system} \tag{26}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \text{ Unit impulse response} \tag{27}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \text{ Convolution sum FIR-system} \tag{28}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \text{ General convolution} \tag{29}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} \text{ Frequency response FIR-system} \tag{30}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(e^{j\hat{\omega}})H_2(e^{j\hat{\omega}}) \tag{31}$$

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \text{ Dirichlet function} \tag{32}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k]z^{-k} \text{ Z-transform} \tag{33}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k} \text{ System function FIR system} \tag{34}$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \text{ Linearity of z-transform} \tag{35}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \text{ Convolution via z-domain} \tag{36}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$